اثربخشی آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پسر پایه دوم ابتدایی

یاسر رضاپور میرصالح*
مهدی دلاوری**
مجید سلیمانی***

چکیده

پژوهش حاضر باهدف تعیین تأثیر آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه دوم ابتدایی انجام شد. این پژوهش یک مطالعه نیمه آزمایشی از نوع پیش‌آزمون-پس آزمون با گروه کنترل بود. از بین کلاس‌های پایه دوم مدارس دوره اول ابتدایی در شهرستان میبد در سال تحصیلی ۹۳- ۹۲، دو کلاس به شیوه نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای انتخاب و پس از همتا کردن دانش‌آموزان از لحاظ عملکرد ریاضی، یکی از کلاس‌ها به تصادف به عنوان گروه آزمایش و کلاس دیگر به عنوان گروه کنترل انتخاب شد. به دانش‌آموزان گروه آزمایش، ۱۱ جلسه دوساعته (هر هفته دو جلسه)، خارج از برنامه‌های کلاسی، برنامه آموزشی تفکر ریاضی ارائه شد، درحالی‌که شرکت‌کنندگان گروه کنترل در انتظار آموزش قرار داده شدند. هر دو گروه یکبار قبل از اجرای برنامه آموزشی و یکبار پس از آن به سؤالات آزمون ریاضی کی مت و یک آزمون محقق ساخته پاسخ دادند. همچنین از نمرات نیمسال اول و دوم دانش‌آموزان نیز به عنوان پیش‌آزمون و پس آزمون استفاده شد. نتایج تحلیل کوواریانس چندراهه (مانکوا) نشان داد که دانش‌آموزان گروه آزمایش به‌طور معنی‌داری در هردو آزمون محقق ساخته و کی مت و همچنین در نمرات نیمسال دوم، نتیجه‌ای بهتر از دانش‌آموزان گروه کنترل گرفته‌اند؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که آموزش تفکر ریاضی بر بهبود عملکرد ریاضی دانش‌آموزان شرکت‌کننده در پژوهش تأثیر معنی‌داری داشته است.

واژگان کلیدی: تفکر ریاضی، عملکرد ریاضی، دانش‌آموزان، ابتدایی.

---

* استادیار مشاوره، دانشگاه اردکان (نویسنده مسئول) y.rezapour@ardakan.ac.ir
** کارشناسی ارشد علوم تربیتی، دانشگاه آزاد اسلامی اردکان .mahdifi.53@gmail
*** کارشناسی ارشد روانشناسی تربیتی، دانشگاه علامه طباطبایی majidsoleymani121@yahoo.com

مقدمه

ریاضیات یکی از شاخه‌های علم است که در توانایی افراد جهت موفقیت در شغل و اداره زندگی موثر بوده و بدین جهت است که در مقاطع مختلف تحصیلی بر روی آن تمرکز می‌شود (بالوگلو و کوکاک[1]، ۲۰۰۶)، حتی تا جایی که یک رشته مخصوص در آموزش و پرورش را به خود اختصاص داده است. از این منظر می‌توان ریاضیات را یک نوع نیاز ضروری به حساب آورد. ماهیت ریاضیات، بحث پیرامون نظم است و موضوع آن توصیف و درک نظمی است که در وضعیت های ظاهراً پیچیده نهفته است. ابزارهای اصولی این علم، مفاهیمی هستند که ما را قادر می‌سازند تا این نظم را توصیف کنیم (دیهانی[2] و همکاران، ۱۹۹۹). ریاضیات بر خلاف تصور برخی، مجموعه‌ای از فرمول‌ها نیست، بلکه ریاضیات فهم و درک مسئله است که از آن طریق بتوان جواب منطقی به مسئله داد. برای به دست آوردن توانایی در زمینه ریاضیات، دانش‌آموز باید دارای پشتکار و صبر باشد، چرا که بتواند برای حل یک مسئله زمان مناسبی را اختصاص دهد و در نهایت با خلاقیت و تفکر به حل آن بپردازد (کلاوسن-می[3]، ۲۰۰۵)؛ بنابراین می‌توان گفت ریاضیات؛ علم حل مسئله و بررسی اعداد، اشکال، اشیاء و نسبت های مورد نیاز در همه علوم است (دیهانی و همکاران، ۱۹۹۹). ریاضی در تمامی جنبه‌های زندگی اجتماعی از قبیل تصمیم‌گیری (رینا و برینرد[4]، ۲۰۰۷)، یادگیری، انگیزش و عملکرد دانشگاهی و شغلی (هاکارینن[5]، ۲۰۱۳) تأثیرگذار است. به طوری که بسیاری از افراد فرصت های تحصیلی و شغلی خود را به دلیل ترس از ریاضی و ناتوانی در آن از دست می‌دهند (همبری[6]، ۱۹۹۹). امروزه با توجه به پیشرفت

1. Baloglu & Kocak
2. Dehaene
3. Clausen-May
4. Reyna & Brainerd
5. Hakkarainen
6. Hembree

شگرف علوم مختلف، می‌توان گفت استفاده از ریاضیات به یک نیاز ضروری در زندگی روزمره تبدیل شده است و باید در سیستم آموزشی بیش از پیش به عملکرد ریاضی دانش‌آموزان توجه شود؛ چرا که ریاضیات، موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل مختلف زندگی بتوانند به‌طور منطقی استدلال کنند، و قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند. از این منظر ریاضیات علمی است که نقشی مؤثر در شناخت طبیعت و دقّت بخشی به مفاهیم سایر علوم را داراست و نشان‌دهنده‌ی چارچوب اصلی روش‌های تفکّر و فهم انسانی است (پاتریک و سوافورد[1]، ۲۰۰۵، ترجمه بهزاد و گویا، ۱۳۸۷).

از جمله مسائلی که همواره ذهن معلّمین و دانش‌آموزان و خانواده‌های آن‌ها را به خود مشغول داشته این است که چرا بعضی از دانش‌آموزان به سادگی ریاضیات را یاد می‌گیرند و بعضی دیگر آن را با مشقّت و زحمت زیادی یاد می‌گیرند؟ (ریس[2] و همکاران، ۲۰۰۳، ترجمه نوروزیان، ۱۳۸۹). چرا یادگیری مفاهیم ریاضی در سال های آغازین تحصیل برای مسئولین، آموزگاران و والدین رضایت‌بخش است، ولی در سال های بعد به صورت غیرمنتظره برخی از دانش‌آموزان در ریاضی دچار افت شدید تحصیلی می‌شوند؟. همچنین چرا بعضی افراد در جبر و محاسبات به خوبی عمل می‌کنند اما در هندسه ضعیف هستند یا بالعکس؟ (جوردن و لوین[3]، ۲۰۰۹).

پژوهش های زیادی برای پاسخ‌دهی به دلایل ضعف در عملکرد ریاضی در سه حوزه آموزش کلاسی، طراحی آموزشی و تحقیقات آموزشی انجام‌گرفته‌اند. هدف این سه حوزه در بهبود آموزش و یادگیری ریاضی مشترک است. در حوزه آموزش کلاسی معلمان بر توان ریاضی دانش‌آموزان و افزایش آن تاکید دارند. در حوزه طراحی آموزشی بر روی مواد آموزشی و غنی کردن آن کار می‌کنند و بالأخره در حوزه

1. Patrik & Savaford
2. Reas
3. Jordan & Levine

تحقیقات آموزشی برای درک و فهم بیشتر یادگیری ریاضی اهمیت ویژه قائل می‌شوند (مگیدسون[1]، ۲۰۰۵). بر اساس این پژوهش‌ها مشخص می‌شود که عوامل مختلفی از جمله اضطراب و نگرانی (نوولو[2] و همکاران، ۲۰۰۷)، خودپنداره ریاضی، عملکرد قبلی ریاضی، انگیزش یادگیری ریاضی (کیامنش و پور اصغر، ۱۳۸۵)، خودکارآمدی ریاضیات، خودگردانی، هدف‌گذاری، راهبردهای یادگیری، روش تدریس، شیوه‌های مطالعه، سبک های شناختی و ادراک از محیط کلاس (کدیور و همکاران، ۱۳۸۹) بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان تأثیرگذار است. به اعتقاد اوشر و پاجارس[3] (۲۰۰۹) عواملی از قبیل نگرش منفی نسبت به ریاضی پیش از حضور در کلاس می‌تواند باعث مشکلات در حوزه یادگیری ریاضی باشند. این دانش‌آموزان عقاید کلیشه‌ای دارند و احساس می‌کنند استعداد ریاضی ندارند، در درس ریاضی موفق نخواهند شد و علاقه‌ای نسبت به ریاضی ندارند. به عبارت دیگر این نوع نگرش‌ها باعث کاهش خودکارآمدی ریاضی این دانش‌آموزان می‌شود.

علاوه بر عواملی که ذکر شد، تفکر ریاضی عامل دیگری است که به نظر می‌رسد عامل زیربنایی بسیاری از عوامل دیگر مؤثر بر عملکرد ریاضی باشد و عمدتاً از سوی معلمان مورد غفلت واقع شده است (شور[4]، ۲۰۰۰). تفکر ریاضی را به‌کارگیری فرآیندهای تفکر مانند تعمیم دادن، انتزاع، نماد سازی، برقراری ارتباط ریاضی، دسته‌بندی، حل مسئله، خلاقیت و غیره در ریاضیات تعریف کرده‌اند (اسکمپ[5]، ۱۹۸۹، ترجمه حیدری قزلچه و گویا، ۱۳۸۱). تفکر ریاضی با استفاده از فرآیندها و راهبردهای آن باعث درگیر کردن فرد با خود، محیط و موضوع آموزشی می‌شود (دوبینسکی[6]، ۲۰۰۰). تفکر ریاضی همچنین بر شیوه‌های تدریس معلمان تأثیر می‌گذارد و یاد دهنده را به سمت دیدگاه

1. Magidson
2. Novello
3. Usher & Pajares
4. Schorr
5. Skampe
6. Dubinsky

اکتشافی سوق می‌دهد و فراگیران را بـه تفکـر و کـاوش پیرامـون موضـوعات مربوطـه تشویق می‌کند (پپ[1] و همکاران، ۲۰۰۳). بدیهی است یادگیری که از این طریق حاصـل می‌شود برخلاف شیوه‌های دیگر یادگیری بادوام تر می‌باشد و زمینه کشف موضـوعات جدید را در ذهن دانش‌آموز پدیدار می‌کند (فرانک[2] و همکاران، ۲۰۰۹). تفکر ریاضـی، تفکر در مورد موضوعات ریاضی نیست اما سبکی از تفکر است که تـابع فعالیـت‌هـا و فرایندهای خاص می‌باشد به طوری که ما را قادر به ارتباط بهتر با مسائل دنیای واقعـی پیرامونمان می‌سازد. البتّه در مراحـل مقـدماتی، آمـوزش تفکـر ریاضـی زمـان بیشـتری می‌گیرد ولی در درازمدت مزایای آن بـر مشـکلات آن برتـری دارد. درکـی کـه از ایـن طریق به دست می‌آید به کودکان کمک می‌کند تا یادگیرندهٔ خوبی شوند و این بدان معنا است که سرعت و قابلیت و گنجایش یادگیری را افزایش می‌دهد و آن را پایدار می‌کند (اسکمپ، ۱۹۸۹، ترجمه حیدری قزلچه و گویا، ۱۳۸۱).

همان طور که اشاره شد تفکر ریاضی شامل فرایندهای تفکر مانند تعمـیم دادن، انتـزاع، نمـاد سازی، برقراری ارتباط ریاضی، دسته‌بندی، حل مسئله، خلاقیت و غیره می‌شـود (اسـتین[3] و همکاران، ۱۹۹۶؛ دوبینسکی، ۲۰۰۰) که در ادامه هر یک از آن‌ها توضیح داده می‌شود.

تعمیم یک عملیات فکری انتزاعی است که با توجه به آن، کیفیت مشترک بین پدیده‌هـا و اشیاء، به صورت ذهنی بسط داده می‌شـود (میکـالوس[4]، ۲۰۰۵، بـه نقـل از روئـین و همکاران، ۱۳۹۴). برای مثال در آموزش بخش‌پذیری اعـداد بـر ۲، دانـش‌آمـوز پـس از انجام چند نمونه باید بتواند اعداد زوج را نام ببرد. همچنین در حوزه ریاضـی، اسـتدلال به فرایندی گفته می‌شود که در آن دانش‌آموز مسائل ریاضی را بـه روش منطقـی مـورد بررسی قرار می‌دهد تا به راه حل برسد (سلدن و سلدن[5]، ۲۰۰۳). برای مثال دانش‌آموز

1. Pape
2. Franke
3. Stein
4. Miclaus
5. Selden & Selden

باید بتواند دلایل و توضیحات خود را برای رد و یا تأیید گزاره‌ها بیان کند. در تفکر ریاضی از چند نوع تفکر به خصوص استفاده می‌شود، یکی از آنها تفکر اگر-پس[1] است. تفکر اگر-پس نوعی تفکر است که در آن قسمت اول و دوم گزاره باهم به صورت شرطی ارتباط دارند. برای مثال اگر فردا باران ببارد، تفریح نمی‌رویم. در حیطه ریاضی نیز این نوع تفکر وجود دارد، برای مثال: اگر ۶+۳=۹ آن گاه ۳+۶=۹ نیز صحیح خواهد بود (دریفوس[2]، ۲۰۰۲). در تفکر ریاضی، فرضیه‌سازی مهارت بسیار مهمی است که مبنای تجربی دارد، یعنی دانش آموز با توجه به اطلاعات و داده‌هایی که قبلاً کسب کرده است دست به فرضیه‌سازی می زند، به عنوان مثال پس از اینکه دانش آموز چندین مثلث را رسم کرد و مجموع زوایای آن را ثبت کرد می‌تواند این فرضیه را مطرح کند که مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰ درجه می‌باشد (داودی، ۱۳۸۸). از دیگر اجزای تشکیل دهند تفکر ریاضی، مهارت حل مسئله است. حل مسئله فرایندی شناختی و رفتاری است که به دانش آموز کمک می‌کند تا از بین پاسخ های مختلف به حل مسئله، پاسخ های بالقوه مؤثر را انتخاب و به کار بندد (شونفلد[3]، ۱۹۹۲). تفکر خلاق نوع دیگری از تفکر در حیطه تفکر ریاضی است که در آن فرد نظرات بدیع، دیدگاه‌های جدید، نگاهی نوآورانه و راه‌های نوین را در برخورد با مسائل مختلف به کار می‌گیرد (سیک و میکر[4]، ۲۰۰۶). انتزاع بخش دیگری از تفکر ریاضی است. تفکر انتزاعی توانایی استفاده بجا از اعداد، ارقام و استدلال های منطقی است که نیازمند شناسایی گزاره‌ها، قضایا، توابع، قوانین و چارچوب‌ها و دیگر امور انتزاعی است (مک مسترر[5] و همکاران، ۲۰۱۰). تفکر انتقادی به عنوان یکی دیگر از انواع تفکر که در تفکر ریاضی مطرح می‌شود، ویژگی است که در آن فرد یک چارچوبی را ترسیم می‌کند و به

1. if-then
2. Dreyfus
3. Schoenfeld
4. Sak & Maker
5. McMaster

تمامی مسائل از آن نگاه می‌کند، این چارچوب جنبه تحلیلی دارد و در آن تمامی احتمالات منطقی پذیرفته می‌شود. در تفکر انتقادی درباره رویدادها، نگاهی تردیدآمیز مطرح است ولی این هرگز به معنی قضاوت زودهنگام نیست (سزر[1]، ۲۰۰۸).

تفکر ریاضی شامل چندین مهارت نیز می‌شود که در ادامه توضیحات مربوط هر یک از آن‌ها می‌آید. مهارت حدس و تخمین زدن که در تفکر ریاضی دیده می‌شود، نوعی توانایی در پیش‌بینی مقادیر بدون استفاده از ابزارهای رسمی اندازه‌گیری است (هال[2]، ۱۹۸۴). شمارش نیز از مهارت های اصلی در آموزش ریاضی است. در این مهارت، دانش‌آموزان باید شیوه‌های شمارش را به طرق مختلف (لمسی، چشمی، ادامه دادن، چند تا چند تا، رو به جلو و معکوس) یاد بگیرند (مانفرا[3] و همکاران، ۲۰۱۴). مهارت طرح سؤال یکی دیگر از اجزای تفکر ریاضی است. در این مهارت دانش آموز باید بتواند سؤالات مختلف مرتبط با مسائل را طرح نماید. بهتر است سؤالاتی مطرح شود که پاسخ های متفاوتی بتواند در خود جای دهد، به عنوان مثال: پنج مسئله بنویسید که در آن پاسخ عدد هشت باشد (شونفلد، ۱۹۹۲). در مهارت دیگر یعنی مقایسه کردن، دانش آموز باید بتواند تفاوت بین دو چیز را بگوید، به عنوان مثال باید تفاوت جمع و تفریق یا ضرب و تقسیم را بداند، این دانش لزوماً از مهارت مقایسه کردن به دست می‌آید (دریفوس، ۲۰۰۲). اکتشاف شامل مهارت در رمزگشایی مهارت های نوشتاری، حساب کردن، اندازه‌گیری، رسم اشکال و نظم‌بخشی است (شونفلد، ۱۹۹۲). الگوی تجسمی به معنای این است که فرد از بین الگوهای متفاوت یکی را انتخاب کرده و به صورت تجسمی به خلق دوباره آن بپردازد (دووال[4]، ۱۹۹۹). تجسم در ریاضی نیازمند تشکیل و دستکاری تصاویر با قلم و کاغذ، پردازش، تصویرسازی و یا فرایندهای ذهنی است که باعث بررسی، کشف و درک مفاهیم می‌شود (دووال، ۱۹۹۹). دقت در

1. Sezer
2. Hall
3. Manfra
4. Duval

ریاضیات، فعالیتی است که توسط آن ایده‌ها و عقاید ارائه‌شده در محتوا، موقعیت و مسائل ریاضی در درجات مختلف هوشیاری (تمرکز) قرار می‌گیرد، هر چه میزان این هوشیاری بیشتر باشد، دقت نیز بالاتر است (عباسی، ۱۳۸۷). روابطِ زمانی کمک می‌کند تا موقعیت فضایی و زمانی اشیاء را بتوانیم توصیف کنیم، بعضی از واژگان میانجی که می‌تواند کمک زیادی به درک این مفهوم به دانش‌آموزان بکند عبارت‌اند از:«اکنون، بعداً»، «امروز، فردا، دیروز»، «قبل از، بعد از»، «زود، دیر» و واژگانی از این قبیل. همچنین در ارتباط با مسافت و سرعت، واژه‌های «سریع، آهسته» می‌توانند به درک روابط فضایی کمک کنند (دریفوس، ۲۰۰۲). دانش آموز در برخورد با مسائل ریاضی باید بتواند از نمادها استفاده کند و موارد استفاده آنها را از یکدیگر تشخیص بدهد، به عنوان مثال دانش آموز باید بداند اعداد ۸ و ۳ با کدام نماد (عملیات) ریاضی برابر با ۱۱ می‌شود (استین و همکاران، ۱۹۹۶). در موقعیت‌یابی فضایی، دانش آموز این مهارت را کسب می‌کند تا با توجه به فضا، موقعیت اشیا را توصیف کند. برای مثال، دانش آموز باید بداند در یک نقاشی، درخت در کجای فضای نقاشی قرار گرفته است (بالا، پایین، چپ، راست) و یا بتواند یک درخت را در فضای راست صفحه به تصویر بکشد (دریفوس، ۲۰۰۲). احتمال، یعنی شانس وقوع یک رویداد، که به صورت پیش‌بینی ارائه می‌شود. برای مثال: جمله‌های فیل‌ها پرواز می‌کنند یا ماست سفید است، احتمال نیست اما جمله‌های، شاید فردا باران ببارد، ممکن است این اتفاق بیفتد، یک احتمال است (فنما[1] و همکاران، ۱۹۹۹). دسته‌بندی، مهارت دیگری است که باید دانش‌آموزان کسب نمایند. در دسته‌بندی دانش آموز یاد می‌گیرد رویدادها، عوامل، اشیاء و غیره را با توجه به یک ملاک مشخص دسته‌بندی کند، برای مثال دسته‌بندی بر اساس وزن، ضلع، زاویه، رنگ و غیره (بورتون[2]، ۱۹۸۴). مهارت در شناسایی روابط عددی شامل فرایندی است که در آن دانش آموز می‌تواند اعداد را دسته‌بندی کند، تشخیص داده و پیش‌بینی کند.

1. Fennema
2. Burton

در روابط عددی مهم تشخیص دانش آموز است، برای بالا بردن تشخیص می‌توان از دانش آموز درخواست کرد تا خودش الگوی عددی بسازد (بورتون، ۱۹۸۴).

تمامی موارد بالا نشان می‌دهد که تفکر ریاضی، ریاضیات و حیطه‌های مورد استفاده آن را به هم پیوند می‌دهد. اگر این آموزش مد نظر قرار داده نشود موجب بروز سؤالاتی از این قبیل در ذهن دانش آموز خواهد شد: به چه دلیلی باید ریاضی را آموخت؟ ریاضیات در کجا مورد استفاده قرار می‌گیرد؟ (دوبینسکی، ۲۰۰۰).

یکی از مشکلات بزرگی که در دوران دبستان وجود دارد، عدم توجه کادر آموزشی بر آموزش کافی در حوزه ریاضیات است. این موضوع زمانی آشکار می‌شود که تعداد بسیاری از دانش‌آموزان وقتی به سطوح بالاتر تحصیلی راه می‌یابند، هنوز مشکل درک یک مسئله ساده ریاضی را دارند. دوره ابتدایی دوره حساسی است که در صورت عدم توجه کافی به مسائل آموزشی در آن، می‌تواند منجر به ضعف در درک و یادگیری شود. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود، این است که چگونه می‌توان مفاهیم اولیه ریاضی را به دانش‌آموزان یاد داد، تا با درک درست بتوانند در زندگی از آنها بهره ببرند؟ چگونه می‌توان از مشکلات آموزشی ریاضی در آینده جلوگیری کرد؟ در تفکّر ریاضی، به روش های ساده و نوین به فرآیندها و راهبردهایی پرداخته شده است که مشکلات و چالش‌هایی را که مربوط به روش های سنّتی می‌باشد را از بین برده، علاقه و انگیزه دانش‌آموزان را به درس ریاضی بیشتر کرده و آن‌ها را کنجکاوتر می‌سازد (دوئر[1]، ۲۰۰۶). تفکّر ریاضی در یادگیری ریاضی دانش‌آموزان و تعمیق تدریس معلمان نقش دارد و غفلت از آن، درس ریاضی را دچار ضعف فراوان می‌کند و متأسفانه این مسئله نه تنها مقطع ابتدایی بلکه مقاطع دیگر آموزشی را در بر می‌گیرد (دوبینسکی، ۲۰۰۰). اهمیت تفکر ریاضی آن جا آشکارتر می‌شود که کسب آن از یک سو به یادگیری ریاضی کودکان کمک می‌کند و از سوی دیگر باعث ارتقاء توان و مهارت های فکری

1. Doerr

دانش‌آموزان به عنوان شهروندان آینده، می‌شود. اگر کلاس درس، روش تدریس معلّم و یادگیری دانش آموز براساس تفکر ریاضی صورت گرفته باشد یادگیری عمیق تر و باانگیزه‌تر می‌شود (جودیت[1] و همکاران، ۱۹۹۹).

با نگاهی رو به جلو می‌توان پیش‌بینی کرد که بیشترین رشد شغلی در آینده برای افرادی خواهد بود که دارای مهارت های بالای سطح تفکر هستند. بر اساس تجربیات و نظرات افراد متبحر، علم ریاضیات یکی از بهترین دانش‌ها برای توسعه چنین مهارت‌هایی می‌باشد و به همین دلیل است که، یکی از مهمترین اهداف تدریس ریاضیات، آموزش استدلال منطقی به دانش‌آموزان می‌باشد (نورث کوت و مک اینتاش[2]، ۱۹۹۹). با توجه به این موضوع، به‌کارگیری راهکارهایی که بتوان استعداد ریاضی دانش‌آموزان را پرورش داد، یکی از وظایف مهم آموزش و پرورش است. با توجه به این اهمیت و مشکلاتی که دانش‌آموزان در نظام آموزش و پرورش ایران در یاددهی و یادگیری ریاضی دارند، انجام پژوهش‌هایی که به بررسی راهکارهای افزایش مهارت های ریاضی دانش‌آموزان، خصوصاً در دوره ابتدایی، می‌پردازد، ضروری به نظر می‌رسد. به این منظور، پژوهش حاضر باهدف بررسی تأثیر آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان دوره ابتدایی، انجام شد.

روش

مطالعه حاضر یک پژوهش نیمه آزمایشی از نوع پیش‌آزمون- پس آزمون با گروه کنترل بود. جامعه آماری این پژوهش بالغ بر ۱۲۰۰ نفر دانش آموز پسر پایه دوم مدارس دوره اول ابتدایی در شهرستان میبد بود که در سال تحصیلی ۹۳- ۹۲ مشغول به تحصیل بودند. به این دلیل که پایه یادگیری ریاضی در سال های اولیه آموزشی شکل می‌گیرد (هینس و کیرتسونیس[3]، ۲۰۰۸)، از دانش‌آموزان دوره اول ابتدایی برای شرکت در

1. Jodit
2. Northcote & McIntosh
3. Hines & Kritsonis

پژوهش استفاده شد. همچنین به دلیل اینکه دانش‌آموزان پایه اول هنوز ممکن بود با مفاهیم اولیه ریاضیات آشنایی نداشته باشند، از بین دوره اول ابتدایی، دانش‌آموزان پایه دوم برای شرکت در پژوهش انتخاب شدند. دو کلاس (۲۰ نفره) از جامعه به روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای انتخاب شدند. به این صورت که به تصادف از بین کلیه مدارس دوره اول ابتدایی شهرستان میبد، دو مدرسه و سپس از بین کلاس‌های پایه دوم آن مدارس، یک کلاس به تصادف انتخاب شدند. یکی از کلاس‌ها به تصادف به عنوان گروه آزمایش و کلاس دیگر به عنوان گروه کنترل انتخاب شد. دانش‌آموزان دو کلاس از لحاظ عملکرد در آزمون استعداد ریاضی کی مت و عملکرد ریاضی در نیمسال اول تحصیلی با یکدیگر همتا شدند. با توجه به همتاسازی، یک نفر از هر دو کلاس حذف شدند و در نهایت ۱۹ نفر از هر دو کلاس باقی ماند که با یکدیگر همتا شده بودند. به دانش‌آموزان گروه آزمایش ۱۱ جلسه دو ساعته (هر هفته دو جلسه) جدای از کلاس‌های آموزشی مدرسه خود، مهارت های تفکر ریاضی آموزش داده شد و گروه کنترل فقط در کلاس‌های آموزشی مدرسه شرکت کردند و هیچ‌گونه آموزش تفکر ریاضی به آن‌ها ارائه نشد. از هر دو گروه، یکبار قبل از اجرای آزمایش و یک بار بعد از آن، یک آزمون ریاضی محقق ساخته و آزمون ریاضی کی مت گرفته شد. به دلیل اینکه اجرای آزمایش در نیمسال دوم تحصیلی دانش‌آموزان انجام می‌شد، از نمره ریاضی دانش‌آموزان در هر دو نیمسال به عنوان مبنایی برای اثربخشی آموزش تفکر ریاضی استفاده شد. توضیح هر یک از این ابزارها در زیر آورده شده است. در نهایت، پس از جمع‌آوری، داده‌ها با استفاده از آزمون کوواریانس مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند. محتوای جلسات آموزش تفکر ریاضی بر اساس مطالعات مشابه انجام‌شده در این زمینه (آونیو[1] و همکاران، ۲۰۰۵؛ استین و همکاران، ۱۹۹۶؛ مولیگان[2] و همکاران، ۲۰۰۸) و

1. Aunio
2. Mulligan

مرور پیشینه نظری پژوهش (دوبینسکی، ۲۰۰۰؛ دیهانی و همکاران، ۱۹۹۹) طراحی شد که در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱. محتوای جلسات آموزش تفکر ریاضی

انتهای هر جلسه به دانش‌آموزان در مورد مفاهیم آموزش داده تکلیف داده می‌شد و در ابتدای جلسه بعد تکالیف جلسه قبل بررسی و مرور می‌شد			
جلسه	محتوا	جلسه	محتوا
اول	اجرای پیش‌آزمون	هشتم	مهارت تفکر انتقادی، کاربرد، دستورالعمل و مقایسه
دوم	معارفه، آشنایی با قوانین گروه، تعداد و زمان جلسات، خلاصه‌ای از برنامه، بیان اهداف	نهم	اکتشاف، الگوی تجسمی، دقت و تجسم ذهنی
سوم	آشنایی با راهبردهای تفکر ریاضی	دهم	روابط زمانی، نماد سازی و نمادپردازی، موقعیت‌یابی فضایی و احتمال
چهارم	آشنایی با فرآیندهای تفکر ریاضی	یازدهم	ارتباط، دسته‌بندی و روابط عددی
پنجم	مهارت های تعمیم،استدلال، تفکر اگر، آنگاه	دوازدهم	مروری بر آموزش های قبلی، جمع‌بندی مطالب و پایان دادن به گروه
ششم	مهارت فرضیه‌سازی، حل مسئله و تفکر خلاق	سیزدهم	اجرای پس آزمون
هفتم	مهارت انتزاع، حدس و تخمین زدن، شمارش و طرح سؤال		

ابزار پژوهش

الف) نمرات ریاضی نیمسال اول و دوم دانش‌آموزان: نمره‌ای که هر دانش آموز در نیمسال اول و دوم خود در درس ریاضی کسب کرده بود به ترتیب به عنوان پیش‌آزمون و پس آزمون انتخاب شد. با توجه به اینکه نحوه ارزیابی دوره ابتدایی به صورت توصیفی می‌باشد، از معلم ریاضی هر کلاس خواسته شد تا از قبل از ارائه ارزشیابی‌توصیفی، آزمونی که از دانش‌آموزان به عنوان مبنای ارزشیابی‌توصیفی گرفته بود را به صورت کمی تصحیح کند و نمرات آن را در اختیار پژوهشگران بگذارد.

ب) آزمون محقق ساخته: این آزمون شامل دو فرم همتای (برای از بین بردن اثر یادگیری از تجربه قبلی) ۱۴ سؤالی بود که سؤالات آن با توجه به محتوای کتاب ریاضی پایه دوم دبستان با سطح دشواری یکسان طراحی شده بود. برای طراحی این آزمون از نظرات پنج معلّم پایه دوم دبستان استفاده شد. و در ادامه نیز روایی محتوایی سؤالات و هم ارز بودن دو فرم به تأیید پنج کارشناس خبره در این زمینه رسید.

پ) پرسشنامه هنجار شده ریاضی کی مت: آزمون ریاضیات کی مت یکی از مهم‌ترین آزمون‌هایی است که تاکنون مورد توجه مشاوران، آزمونگران و دیگر گروه‌های آموزشی قرار گرفته است. این آزمون در سال ۱۹۷۶ توسط کرنولی، ناچیمن و پریچت[1] (۱۹۷۶، به نقل از محمد اسماعیل و هومن، ۱۳۸۱) ابداع شد. این آزمون از لحاظ گستردگی و توالی شامل سه بخش مفاهیم اساسی (سه خرده آزمون خرده آزمون شمارش، اعداد گویا و هندسه)، عملیات (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و محاسبه‌ی ذهنی) و کاربرد (اندازه‌گیری، زمان، پول، تخمین، تفسیر داده‌ها و حل مسئله) می‌باشد که از اهمیت آموزشی یکسانی برخوردارند. این بخش‌ها در مجموع به سیزده خرده آزمون تقسیم می‌شوند. هر بخش به سه یا چهار حیطه تقسیم می‌شود و در شناسایی دانش‌آموزان در حوزه‌های مختلف ریاضی، نشان دادن اثرات آموزش ریاضی در یک برنامه ترمیمی یا ویژه، و ارزشیابی از برنامه‌های آموزشی کاربرد دارد (محمد اسماعیل و هومن،۱۳۸۱). روایی این آزمون از طریق روایی محتوا، روایی تفکیکی، همگرا، و روایی پیش‌بین محاسبه و اعتبار کل این آزمون در پنج پایه دبستان با استفاده از روش مبتنی بر تئوری سؤال-پاسخ بین ۰/۸۰ تا ۰/۸۴ به دست آمد (محمد اسماعیل و هومن، ۱۳۸۱).

یافته‌ها

وضعیت تحصیلی شرکت‌کنندگان گروه آزمایش به دلیل همتا کردن آزمودنی‌ها تقریباً مشابه بود. در هر دو گروه ۵ نفر در وضعیت "قابل‌قبول"، ۷ نفر در وضعیت "خوب"

1. Cornoly, Nachtman & Pritchett

و ۷ نفر در وضعیت "خیلی خوب" قرار داشتند. سطح تحصیلات پدر در گروه آزمایش ۶ نفر دیپلم و پایین تر، ۱۰ نفر کاردانی و کارشناسی و ۳ نفر کارشناسی ارشد و بالاتر بود. در گروه کنترل سطح تحصیلات پدر ۴ نفر دیپلم و پایین تر، ۱۱ نفر کاردانی و کارشناسی و ۴ نفر کارشناسی ارشد و بالاتر بود و از این لحاظ هر دو گروه تقریباً در وضعیت مشابهی قرار داشتند.

جدول ۱. میانگین و انحراف معیار نمره‌های آزمون کی مت، محقق ساخته و نمره نیمسال در پیش‌آزمون و پس آزمون

متغیر	گروه	تعداد	پیش‌آزمون		پس آزمون	
			میانگین	انحراف معیار	میانگین	انحراف معیار
آزمون محقق ساخته	آزمایش	۱۹ نفر	۱۴/۷۳۷	۳/۵۴۹	۱۷/۹۰۸	۲/۵۵۱
	کنترل	۱۹ نفر	۱۴/۹۶۱	۳/۳۴۶	۱۵/۳۰۲	۳/۰۸۹
نمره نیمسال	آزمایش	۱۹ نفر	۱۶/۳۹۵	۳/۳۹۳	۱۸/۶۱۸	۲/۱۲۵
	کنترل	۱۹ نفر	۱۴/۶۸۴	۳/۶۳۷	۱۵/۹۴۷	۳/۹۲۲
آزمون کی مت	آزمایش	۱۹ نفر	۴۷/۴۷۳	۳/۹۶۳	۵۰/۵۷۹	۴/۰۸۶
	کنترل	۱۹ نفر	۴۵/۶۸۲	۲/۶۸۸	۴۶/۱۰۵	۲/۴۰۱

میانگین و انحراف معیار نمره‌های آزمون کی مت، محقق ساخته و نمره نیمسال به تفکیک گروه‌های آزمایش و کنترل و به تفکیک مراحل اجرای آزمون در جدول ۲ آورده شده است. همانطورکه که داده‌های این جدول نشان می‌دهد، میانگین‌ها در مرحله پیش‌آزمون در دو گروه آزمایش و کنترل نزدیک به یکدیگر هستند، اما در مرحله پس آزمون مقدار میانگین‌ها در گروه آزمایش نسبت به گروه کنترل افزایش پیدا کرده است.

جدول ۳. نتایج تحلیل مانکوا برای مقایسه نمرات پس آزمون عملکرد اجتماعی و مشکلات رفتاری گروه‌های آزمایش و کنترل با کنترل پیش‌آزمون

نام آزمون	مقدار	F	معنی‌داری	مجذور اتا
آزمون اثر پیلایی	۰/۶۱۲	۱۶/۳۱۶	۰/۰۰۰۱	۰/۶۱۲
آزمون لامبدای ویلکز	۰/۳۸۸	۱۶/۳۱۶	۰/۰۰۰۱	۰/۶۱۲
آزمون اثر هتلینگ	۱/۵۷۹	۱۶/۳۱۶	۰/۰۰۰۱	۰/۶۱۲
آزمون بزرگترین ریشه روی	۱/۵۷۹	۱۶/۳۱۶	۰/۰۰۰۱	۰/۶۱۲

برای آزمون فرضیه اصلی پژوهش یعنی تأثیر آموزش اثربخشی آموزش تفکر ریاضی بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان از آزمون تحلیل کوواریانس چندراهه (مانکوا) استفاده شد که نتایج آن در جدول ۳ آورده شده است. آزمون مانکووا جزء آزمون های پارامتریک بوده و انجام آن مستلزم داشتن پیش‌فرض تساوی واریانس های دو گروه، توزیع نرمال داده‌ها در جامعه، و همگنی شیب رگرسیون داده‌ها است. نتایج تحلیل داده‌ها نشان داد که تمامی این پیش‌فرض‌ها به جز همسانی واریانس های دو گروه در پیش‌آزمون کی مت، تأیید شده است. این مورد نیز به دلیل اینکه سایر پیش‌فرض‌ها تأیید شده بود و همچنین تعداد افراد هر دو گروه آزمایش و کنترل برابر بود، به عنوان محدودیت پژوهش پذیرفته شد و از آزمون پارامتریک مانکووا به دلیل داشتن توان آزمون بیشتر نسبت به آزمون های پارامتریک استفاده شد. به علت تعداد زیاد جداول، به جزئیات این آزمون‌ها در این بخش اشاره نشد.

جدول ۴. نتایج تحلیل کواریانس در متن مانکووا روی نمرات پس آزمون متغیرهای عملکرد اجتماعی و مشکلات رفتاری

اثر	منبع تغییرات	مجموع مجذورات	درجه آزادی	میانگین مجذورات	F	معنی‌داری	اندازه اثر
گروه	آزمون محقق ساخته	۲۴/۰۱۸	۱	۲۴/۰۱۸	۲۲/۰۵۷	۰/۰۰۰۱	۰/۴۰۱
	آزمون کی مت	۶۸/۶۳۷	۱	۶۸/۶۳۷	۳۰/۳۴۲	۰/۰۰۰۱	۰/۴۷۹
	نمره نیمسال	۲۱/۱۳۴	۱	۲۱/۱۳۴	۷/۲۶۷	۰/۰۱۱	۰/۱۸۰

نتایج آزمون مانکووا در جدول ۴ نشان داد که مقادیر F همگی معنی‌دار هستند. به عبارت دیگر، با کنترل پیش‌آزمون، نمرات عملکرد ریاضی در هر سه آزمون کی مت، محقق ساخته و نمره نیمسال در مرحله پس آزمون در آزمودنی های گروه آزمایش به‌طور معنی‌داری بیشتر از نمرات آزمودنی های گروه کنترل شده و فرضیه پژوهش حاضر تأیید شده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که آموزش تفکر ریاضی به‌طور

معنی‌داری موجب افزایش نمره عملکرد ریاضی در مرحله پس آزمون در آزمودنی های گروه آزمایش نسبت به گروه کنترل شده است. با توجه به معنی‌داری شدن مقدار F در آزمون مانکووا، برای مشخص شدن اینکه نمرات کدامیک از آزمون های عملکرد ریاضی در مرحله پس آزمون تغییر کرده است، از تحلیل کوواریانس در متن مانکووا استفاده شد که نتایج آن در جدول ۴ آورده شده است.

همان طور که در جدول ۴ مشاهده می‌شود، تمامی مقادیر F در این جدول نیز معنی‌دار هستند و نشان می‌دهند نمرات آزمودنی های گروه آزمایش در هر سه آزمون عملکرد ریاضی در مرحله پس آزمون نسبت به آزمودنی های گروه کنترل به‌طور معنی‌داری تغییر کرده است و آموزش تفکر ریاضی بر افزایش نمرات دانش‌آموزان گروه آزمایش در آزمون کی مت، محقق ساخته و نمره نیمسال دوم ریاضی دانش‌آموزان شرکت‌کننده در گروه آزمایش تأثیر معنی‌داری داشته است. مقادیر اندازه اثر در تحلیل کوواریانس در متن مانکووا نشان می‌دهد که آموزش تفکر ریاضی ۴۰/۱ درصد از افزایش نمره دانش‌آموزان در آزمون محقق ساخته، ۴۷/۹ درصد از افزایش نمره در آزمون کی مت و ۱۸ درصد از افزایش نمره در نمره ریاضی نیمسال دوم دانش‌آموزان را در گروه آزمایش تبیین می‌کند. همان طور که مشاهده می‌شود، آموزش تفکر ریاضی از بین سه آزمون، کمترین تأثیر را بر آزمون نیمسال دوم دانش‌آموزان داشته است.

بحث و نتیجه‌گیری

یافته‌های این پژوهش نشان داد که آموزش مهارت های تفکر ریاضی بر افزایش عملکرد ریاضی دانش‌آموزان پایه دوم دوره اول ابتدایی تأثیر معنی‌داری دارد. عملکرد ریاضی دانش‌آموزان که به سه شیوه بررسی تغییرات نمرات نیمسال، آزمون محقق ساخته و آزمون ریاضی کی مت مورد ارزیابی قرار گرفت هر سه در مرحله پس آزمون در گروه آزمایش افزایش پیدا کرده بود و فرضیه پژوهش تأیید شد. این یافته‌ها همسو با نتایج مطالعات پیشین بود (عباس و السید، ۲۰۱۶؛ آونیو و همکاران، ۲۰۰۵؛ استین و

همکاران، ۱۹۹۶؛ مولیگان و همکاران، ۲۰۰۸). برای تبیین این یافته می‌توان گفت که پیشرفت در عملکرد ریاضی به دو مؤلفه نیاز دارد: ابتدا دریافت از طریق حواس که بیشتر بر زبان و تصویر تاکید دارد و سپس پردازش شناختی آن (دووال، ۱۹۹۹). تحقیقات نشان داده است که دشواری‌هایی که در حوزه ریاضی وجود دارد در دو طیف شناختی قابل بررسی است؛ یکی مشکل در بازیابی تعدادی از واقعیت‌ها و توانایی‌ها و دیگری استفاده از راهبردهای ناکارآمد و ناپخته است (جوردن و هانیچ[1]، ۲۰۰۰). در مبحث راهبردهای مورد استفاده می‌توان از سبک های تفکر سخن به میان آورد. در این مورد فنما و همکارانش (۱۹۹۶) بیان می‌کنند که ریاضیات به تفکر سطح بالا نیازمند است و در یادگیری ریاضیات دانش‌آموزان با پیچیدگی رو به رو می‌شوند. یکی از انواع تفکر سطح بالا، تفکر ریاضی است که باعث جمع‌آوری اطلاعات به شیوه خاص می‌شود (بورتون، ۱۹۸۴). در تفکر ریاضی با دو نوع فعالیت شناختی رو به رو هستیم، ابتدا پردازش سپس تبدیل (دووال، ۱۹۹۹). در تفکر ریاضی دانش آموز به یک قانون دست می‌یابد که می‌تواند آن را در شرایط دیگر به کار بندد. برای مثال زمانی که دانش آموز آموخت جمع کدام دو عدد ۱۷ می‌شود، می‌تواند آن را به اعداد دیگر که نتیجه‌اش همین می‌شود نیز تعمیم دهد. تفکّر ریاضی با به کار گرفتن فرایندهای تفکر مانند تعمیم دادن، انتزاع، نماد سازی، برقراری ارتباط ریاضی، دسته‌بندی، حل مسئله، خلاقیت و غیره (اسکمپ، ۱۹۸۹، ترجمه حیدری قزلچه و گویا، ۱۳۸۱) باعث افزایش عملکرد ریاضی دانش‌آموزان می‌شود. بنابراین یادگیری ریاضی با تفکر ریاضی در ارتباط است و باعث ایجاد مفاهیم و ارتباطات ریاضی توسط افراد دارای تفکر ریاضی می‌شود (ایتو-هینو[2]، ۱۹۹۵).

تفکر ریاضی با به کار بستن فرایندهای متفاوت بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان تأثیر می‌گذارد. زمانی که دانش آموز دارای تفکر ریاضی در ریاضیات با مسئله‌ای رو به رو می‌شود،

1. Jordan & Hanich
2. Ito-Hino

برای حل مسئله فرضیه‌ای مطرح می‌کند. دانش آموز باید بتواند برای فرضیه‌ای که ارائه داده است استدلال منطقی بیاورد. برخی از راهبردها، مانند راهبردهای تفکر اگر- پس، مهارت حدس و تخمین زدن، مقایسه کردن، دسته‌بندی، احتمال، روابط زمانی، روابط می‌توانند در استدلال مفید واقع شوند (شونفلد، ۱۹۹۲). زمانی که دانش آموز از تفکر ریاضی برخوردار نباشد در این راهبردها ضعیف خواهد بوده و نمی‌تواند، استدلال های مناسبی را برای حل مسئله به کار بگیرد و چون نمی‌تواند استدلال کند، هیچ‌گونه فرضیه‌سازی را نخواهد داشت. در مقابل دانش‌آموزی که تفکر ریاضی ندارد صرفاً به آموزش های معلم اکتفا می‌کند و خود مهارتی در حل مسئله ندارد (دیهانی و همکاران، ۱۹۹۹). زمانی که دانش آموز دارای تفکر ریاضی، مسئله را حل کرد، با استفاده از عملیات تعمیم آن را در شرایط و مسائل مشابه به کار می‌گیرد (دوبینسکی، ۲۰۰۰). در تفکر ریاضی نمادها جایگاه ویژه‌ای دارند و در آموزش آن باید دقت کرد. نماد های جزئی از یک کلیت هستند. انتزاع کلیت و راهبرد مهمی است که باید دانش آموز در آن مهارت داشته باشد تا بتواند در سایه آن در شناسایی نماد و نماد سازی مهارت کسب نماید. دانش آموز باید بداند چگونه (دستورالعمل) و کجا (کاربرد) از این نمادها استفاده نماید (دوبینسکی، ۲۰۰۰). دانش‌آموزی که از انتزاع ضعیفی برخوردار باشد در حل مسائل ریاضی به مشکل بر می‌خورد. برای مثال، در مسئله منیژه چهار سیب دارد، نیره پنج سیب دارد، کامران نیز سه انار دارد. حال اگر این دو دختر هر کدام دو سیب خود را به کامران دهند و هر کدام یک انار از کامران بگیرند؛ کامران چند سیب دارد؟ نیره چند میوه دارد؟ و یا در مسئله: در یک نقاشی، هوا رو به تاریکی می رود و خورشید در حال غروب کردن است، خورشید در کجای صفحه نقاشی قرار دارد؟

دانش‌آموزی که دارای تفکر ریاضی است در برخورد با مسائل مختلف ریاضیات به دقت به وارسی ابعاد آن می‌پردازد. چون دانش ریاضی در بین علوم از کمترین خطا برخوردار است بنابراین ضرورت می‌یابد که دانش آموز با دقت و دیدی تیزبینانه به مسئله و حل آن نگاه کند (شونفلد، ۱۹۹۲). چه بسیار اتفاق افتاده است که دانش‌آموزان راه حل را به درستی انجام داده‌اند اما در محاسبه به پاسخ اشتباه رسیده‌اند، و یا در

روش حل مسئله، نمادی را جا به جا به‌کاربرده‌اند و نتیجه آن ناتوانی در حل مسئله شده است. اما دانش آموز دارای تفکر ریاضی، دارای تفکر انتقادی است و جزء به جزء مسئله و فرآیند حل مسئله را زیر نظر دارد تا مبادا در هر کدام اشتباهی رخ داده باشد (سزر، ۲۰۰۸). در مقایسه این دو گروه از دانش‌آموزان مشخص می‌شود که چگونه دانش‌آموزان دارای تفکر ریاضی در مقایسه با سایر دانش‌آموزان کمترین اشتباه و بیشترین پاسخ درست را دارند. علاوه بر تفکر انتقادی، تفکر خلاق نیز با به کار بردن مهارت اکتشاف، در پی راه‌کارهای جدید و روش های بدیع برای حل مسئله است. دانش‌آموزی که تفکر خلاق داشته باشد، در ریاضیات به یک روش و در یک چهارچوب به پاسخ‌دهی نمی‌پردازد، بلکه در ابتدا راهکارهای متفاوت را برای حل مسئله در نظر می‌گیرد و از روش های مختلف مسئله را حل می‌کند، در پایان می‌تواند نتایج را باهم مقایسه کند و در رد و اثبات راه‌حل‌های متفاوت، استدلال بیاورد (سیک و میکر، ۲۰۰۶). مهارت طرح سؤال از دیگر مهارت‌هایی است که با تفکر خلاق در ارتباط است. زمانی که دانش آموز در برخورد با مسائل ریاضی بتواند آن مسائل را به گونه‌های مختلف برای خود مطرح کند، تابعاً می‌تواند پاسخ های متفاوت، با روش های متفاوت به آن مسئله بدهد، و در این صورت احتمال حل مسئله در ریاضیات افزایش می‌یابد (شونفلد، ۱۹۹۲).

نتایج پژوهش حاضر نشان داد که احتمالاً آموزش تفکر ریاضی باعث تقویت مفاهیم پایه‌ای یادگیری ریاضی شده و در نتیجه افزایش نمرات ریاضی دانش‌آموزان را در پی داشته است. با توجه به این یافته از مسئولین آموزش و پرورش انتظار می رود تفکّر ریاضی را در برنامه درسی ریاضی دانش‌آموزان، خصوصاً در بدو ورود به مدرسه، به عنوان یک ضرورت بگنجانند. همچنین از آموزگاران ریاضی انتظار می رود فرایندهای تفکّر ریاضی را در تدریس خود به کار گیرند تا موفقیت بیشتری عاید فراگیران شود. علاوه بر این، برگزاری جلسات برای خانواده‌ها و آشنا کردن آنان با تفکّر ریاضی و نحوه آموزش آن به کودکان می‌تواند تأثیر بسزایی در پیشرفت فرزندانشان داشته باشد.

با این وجود، برای تعمیم بهتر نتایج این پژوهش، بهتر است پژوهش های مشابه بیشتری در این مورد صورت گیرد. خصوصاً اینکه این پژوهش از محدود پژوهش‌هایی است که تاکنون در این مورد در کشور صورت گرفته و محدودیت در منابع نظری و پژوهشی ممکن است در تنظیم مطالب و برنامه آموزشی محدودیت‌هایی را ایجاد کرده باشد. از دیگر محدودیت های پژوهش این بود که امکان اجرای مرحله پی گیری به علت فرا رسیدن تعطیلات تابستان و عدم دسترسی به دانش‌آموزان فراهم نشد؛ بنابراین پایداری آموزش های داده‌شده به دانش‌آموزان در این زمینه مورد بررسی قرار نگرفت. همچنین به دلیل محدودیت های اجرایی، پژوهش فقط در دانش‌آموزان پسر انجام شد، و بنابراین تعمیم آن به دانش‌آموزان دختر بایستی با احتیاط صورت گیرد. این مسئله در حالی است که تفاوت های جنسیتی ممکن است بر تفکر ریاضی دانش‌آموزان تأثیر داشته باشد (فنما و همکاران، ۱۹۹۸). بنابراین پیشنهاد می‌شود پژوهش های مشابهی در دانش‌آموزان دختر و همچنین در پایه‌های دیگر تحصیلی انجام شوند.

منابع

اسکمپ، ریچارد. (۱۹۸۹). "فهم رابطه‌ای و فهم ابزاری". ترجمه رضا حیدری قزلچه و زهرا گویا (۱۳۸۱). *مجله رشد آموزش ریاضی*، ۱۵-۴.

پاتریک، جرمی کیل؛ سوافورد، جین. (۲۰۰۵). *"کمک کنیم کودکان ریاضی یاد بگیرند"*. ترجمه مهدی بهزاد و زهرا گویا (۱۳۸۷). تهران: انتشارات فاطمی.

داوودی، خسرو. (۱۳۸۸). "مبانی آموزش ریاضیات دوره ابتدایی". *رشد آموزش ابتدایی*، ۳، ۳۵ -۳۴

روئین، مارال؛ محمدیان، رستم؛ نژاد صادقی، نوراله. (۱۳۹۴). "تعمیم در ریاضیات". *فرهنگ و اندیشه ریاضی*، ۵۶، ۴۷- ۳۷.

ریس، رابرت؛ سایدام، مرلین؛ مری، مونتگومری. (۲۰۰۳). *"کمک به کودکان در یادگیری ریاضیات"*. ترجمه مسعود نوروزیان (۱۳۸۹). تهران: انتشارات مدرسه.

کدیور، پروین؛ فرزاد، ولی‌الله؛ عربزاده، مهدی؛ نگهبان سلامی، محمود. (۱۳۸۹). "فراتحلیل مطالعات مربوط به عملکرد ریاضی دانش‌آموزان". *فصلنامه اندازه‌گیری تربیتی*، ۱(۲)، ۹۴- ۷۵.

کیامنش، علیرضا؛ نصیبه، پور اصغر. (۱۳۸۵). "نقش خودپنداره ریاضی، انگیزش یادگیری ریاضی، عملکرد قبلی ریاضی و جنسیت در پیشرفت ریاضی". *مجله علوم تربیتی و روانشناسی*، ۱۳(۲)، ۹۴- ۷۷

محمد اسماعیل، الهه؛ هومن، حیدر علی. (۱۳۸۱). *"انطباق و هنجاریابی آزمون ریاضیات ایران کی مت"*. پژوهش در حیطه کودکان استثنایی، ۲(۴)، ۳۲۳-۳۳۲.

Abbas, S., & Al-Sayed, R. (2016). A Program Based on Developmental Mathematics Approach to Develop Higher Order Mathematical Thinking Levels and Mathematics Appreciation for Primary Stage Students. *Education*, 136(3), 378-390.

Aunio, P., Hautamäki, J., & Van Luit, J. E. (2005). Mathematical thinking intervention programmes for preschool children with normal and low number sense. *European Journal of Special Needs Education*, 20(2), 131-146.

Baloglu, M., & Kocak, R. (2006). A multivariate investigation of the differences in mathematics anxiety. *Personality and Individual Differences*, 40(7), 1325-1335.

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for research in mathematics education*, 15(1), 35-49.

Clausen-May, T. (2005). *Teaching maths to pupils with different learning styles*. Sage Pub.

Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: Behavioral and brain-imaging evidence. *Science*, 284(5416), 970-974.

Doerr, H. M. (2006). Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 62(1), 3-24.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. in D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, pp. 25–41.

Dubinsky, E. (2000).Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking processes*. (pp 95-123). Dordrecht, The Netherland: Kluwer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference* (3-26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, 27(4), 403-434.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Jacobs, V. R., Franke, M. L., & Levi, L. W. (1998). A longitudinal study of gender differences in young children's mathematical thinking. *Educational researcher*, 27(5), 6-11.

Franke, M. L., Webb, N. M., Chan, A. G., Ing, M., Freund, D., & Battey, D. (2009). Teacher questioning to elicit students' mathematical thinking in elementary school classrooms. *Journal of Teacher Education*, 60(4), 380-392.

Hakkarainen, A., Holopainen, L., & Savolainen, H. (2013). Mathematical and reading difficulties as predictors of school achievement and transition to secondary education. *Scandinavian journal of educational research*, 57(5), 488-506.

Hall Jr, L. T. (1984). Estimation and Approximation--Not Synonyms. *Mathematics teacher*, 77(7), 516-17.

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for research in mathematics education*, 21(1), 33-46.

Hines, M., & Kritsonis, W. A. (2008). An in-depth analysis of the cognitive and metacognitive dimensions of African American elementary students' mathematical problem solving skills. *Focus on Colleges, Universities, and Schools*, 2(1), 1-9.

Jordan, N. C., & Hanich, L. B. (2000). Mathematical thinking in second-grade children with different forms of LD. *Journal of learning disabilities*, 33(6), 567-578.

Jordan, N. C., & Levine, S. C. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews*, *15*(1), 60-68.

Judith, L., Lauren, A. Murphy, and Karen, C. Fuson. (1999). Advancing Children's Mathematical Thinking in Everyday Mathematics Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30(2)148-170.

Magidson, Susan. (2005). Building bridges within mathematics ducation: Teaching, research, and instructional design. *Journal of Mathematical Behavior*. 24(2), 135-169.

Manfra, L., Dinehart, L. H., & Sembiante, S. F. (2014). Associations between counting ability in preschool and mathematic performance in first grade among a sample of ethnically diverse, low-income children. *Journal of Research in Childhood Education*, 28(1), 101-114.

McMaster, K., Rague, B., & Anderson, N. (2010, October). Integrating Mathematical Thinking, Abstract Thinking, and Computational Thinking. In *2010 IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)* (pp. S3G-1). IEEE.

Mulligan, J., Mitchelmore, M., Kemp, C., Marston, J., & Highfield, K. (2008). Encouraging mathematical thinking through pattern and structure: An intervention in the first year of schooling. Online Available at:
www.researchonline.mq.edu.au/vital/access/services/Download/mq:9448/DS01

Northcote, M., & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life?. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 4(1), 19.

Novello, AC. Degraw, C. & Kleinman, D. (2007). Healthy children ready to learn: An essential collaboration between health and education.Public Health Reports, 107, 3-15.

Pape, S. J., Bell, C. V., & Yetkin, I. E. (2003). Developing mathematical thinking and self-regulated learning: A teaching experiment in a seventh-grade mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 179-202.

Reyna, V. F., & Brainerd, C. J. (2007). The importance of mathematics in health and human judgment: Numeracy, risk communication, and medical decision making. *Learning and Individual Differences*, 17(2), 147-159.

Sak, U., & Maker, C. J. (2006). Developmental variation in children's creative mathematical thinking as a function of schooling, age, and knowledge. *Creativity research journal*, 18(3), 279-291.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York: Mcmillan, 334-370.

Schorr, R. Y. (2000). Impact at the student level: a study of the effects of a teacher development intervention on students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(2), 209-231.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 34(1) 4-36.

Sezer, R. (2008). Integration of critical thinking skills into elementary school teacher education courses in mathematics. *Education*, 128(3), 349-369.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal*, 33(2), 455-488.